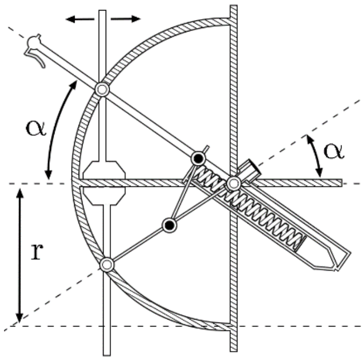
Liceo Statale Ettore Majorana

SIMULAZIONE DELL’ESAME DI STATO

Tema di: MATEMATICA

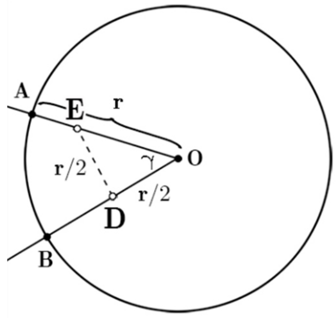
Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 quesiti del questionario



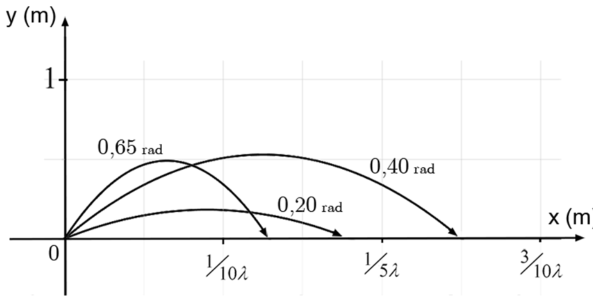
PROBLEMA 1

Lo strumento raffigurato a fianco $(\leftarrow)$, detto *lanciatore*, è progettato per effettuare test balistici di precisione su piccoli meccanismi a molla: esso consente di lanciare proiettili con un’inclinazione controllata di α gradi, con $0<\alpha<\pi/4$, a una velocità proporzionale a $\sqrt{\cos(2\alpha)}$. I proiettili vengono scagliati in una camera ipobarica per minimizzare gli effetti perturbativi legati alla presenza dell’aria.

Il meccanismo di puntamento si basa sulla costruzione geometrica raffigurata a destra $(\rightarrow)$.



1. Data una circonferenza di centro O e raggio r e un suo angolo al centro $\gamma=A\widehat{O}B$, traccia su OB il punto medio D e su AO il punto E tale che $OD\cong DE$. Dimostra (con metodi di geometria razionale o con strumenti trigonometrici) che $\overline{EO}=r\cdot\cos(\gamma)$.



Esempi di traiettorie per diversi valori di α

Le traiettorie seguite dai proiettili all’interno della camera ipobarica hanno tutte l’equazione incorniciata in basso:

$$\boxed{y=-\frac{\lambda}{\cos(2\alpha)\cos^2(\alpha)}x^2+\tan(\alpha)x}$$

λ è una costante positiva con unità di misura $1\,m^{-1}$ (il valore di λ dipende dalle specifiche del *lanciatore* e dall’accelerazione di gravità g), α è l’angolo di lancio con $0<\alpha<\pi/4$ e x,y sono le coordinate delle posizioni occupate dal proiettile durante il moto.

2. Per quale inclinazione α si ha la gittata massima (cioè per quale angolo α il proiettile ricade al suolo alla distanza maggiore dal punto di lancio)? Consiglio: durante i calcoli cerca di semplificare le espressioni risultanti usando la *formula di duplicazione del seno*.

3. Supponendo di regolare il *lanciatore* con un angolo α scelto a caso (e considerando ogni valore dell’intervallo $]0;\pi/4[$ equiprobabile), quale è la probabilità di effettuare un lancio con una gittata maggiore di $1/(8\lambda)$? (*scrivi la probabilità in forma di frazione o di percentuale*).

Durata massima della prova: 5 ore. Non è consentito lasciare l’Istituto prima che siano trascorse 4 ore dalla dettatura del tema È consentito l’uso della calcolatrice non programmabile. È consentito l’uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

4. Considerando tutti e soli gli angoli α ammessi, quale è la gittata media del *lanciatore*? (*la media dipenderà ovviamente anche da* λ).

PROBLEMA 2

Si chiamano *coseno iperbolico* e *seno iperbolico e* si indicano rispettivamente con i simboli $\cosh(x)$ e $\sinh(x)$, le seguenti funzioni:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

I nomi delle funzioni iperboliche derivano dalle strette analogie che le legano alle omonime funzioni goniometriche. Ecco qui una brevissimo catalogo, dal quale si evince che alcune relazioni sono identiche, altre differiscono soltanto per pochi segni.

(nota bene: per risolvere i prossimi problemi può essere utile utilizzare le informazioni contenute in tabella)

	Versione goniometrica	Versione iperbolica
Valori Notevoli	$\sin(0)=0$, $\cos(0)=1$	$\sinh(0)=0$, $\cosh(0)=1$
Parità e disparità	$\sin(-x)=-\sin(x)$ $\cos(-x)=\cos(x)$	$\sinh(-x)=-\sinh(x)$ $\cosh(-x)=\cosh(x)$
Relazione fondamentale	$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$	$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$
Formula del seno di una somma	$\sin(x+y)=...$ $...=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$	$\sinh(x+y)=...$ $...=\sinh(x)\cosh(y)+\sinh(y)\cosh(x)$
Derivate reciproche	$D\sin(x)=\cos(x)$ $D\cos(x)=-\sin(x)$	$D\sinh(x)=\cosh(x)$ $D\cosh(x)=\sinh(x)$

1. Trova le formule mancanti della seguente tabella (riportando non solo il risultato ma l'intero svolgimento che ti ha portato alla risposta):

	Versione goniometrica	Versione iperbolica
Formula del coseno di una somma	$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$	$\cosh(x+y)=...$
Formula di duplicazione per il seno	$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$	$\sinh(2x)=...$

2. Traccia il grafico della funzione $y = 1/\cosh(x)$ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy mettendo in rilievo eventuali punti notevoli (massimi, minimi, flessi) e asintoti. *Aiuto: se durante le derivazioni vengono mantenuti i simboli* $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$, *per determinare i segni della derivata seconda può essere utile sapere che…*

$\sinh(x) = 1$ ha soluzione $x = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$	$\sinh(x) > 1$ ha soluzione $x > \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$
$\sinh(x) = -1$ ha soluzione $x = \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$	$\sinh(x) > -1$ ha soluzione $x > \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

3. Dimostra in modo rigoroso che il grafico della funzione $y = \left|\sinh(x)\right|$ ha in $x = 0$ un punto angoloso e calcola l'ampiezza di tale angolo.

In analogia con le funzioni goniometriche, si definiscono la *tangente iperbolica* e la sua inversa, l'*arcotangente iperbolica* :

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{arctanh}(x) \text{ inversa di } \tanh(x)$$

4. Determina la derivata di $\operatorname{arctanh}(x)$ (usando il metodo delle derivate della funzioni inverse).

QUESTIONARIO

1. Stabilisci i valori di a e b, in modo che la funzione definita a fianco sia continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x-1} & per \;\; x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} & per \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

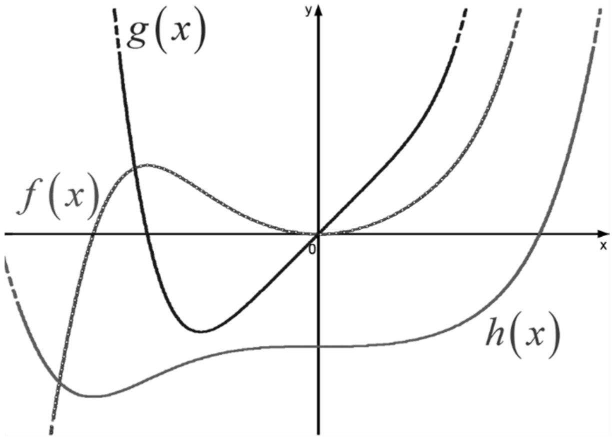
2. Date le funzioni $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, calcola l'area della regione di piano compresa fra i due grafici nell'intervallo determinato da due successivi punti d'intersezione.

3. Enuncia in modo rigoroso il teorema di Rolle e usalo per rispondere in modo convincente alla seguente domanda: quante soluzioni reali distinte ha l'equazione $5x^4 - 60x^3 + 255x^2 - 450x + 274 = 0$, dal momento che $5x^4 - 60x^3 + 255x^2 - 450x + 274$ è la derivata di $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$?

Durata massima della prova: 5 ore. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 4 ore dalla dettatura del tema È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile. È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

4. Stabilisci il valore di $a \in \mathbb{R}$ in modo che la retta tangente alla funzione $f(x) = ax^2 - bx + 6$ nel punto con ascissa $x_0 = 2$ passi per l'origine.

5. Nel piano cartesiano a fianco sono rappresentati i grafici di tre funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$. Esse sono legate dal fatto di essere l'una la derivata dell'altra (ad esempio potrebbe essere $f(x) = g'(x)$ e $g(x) = h'(x)$ per cui $f(x) = h''(x)$).
Stabilisci l'ordine corretto di tale relazione e spiega come sei giunto alla conclusione, ricollegandoti al significato geometrico della derivata.

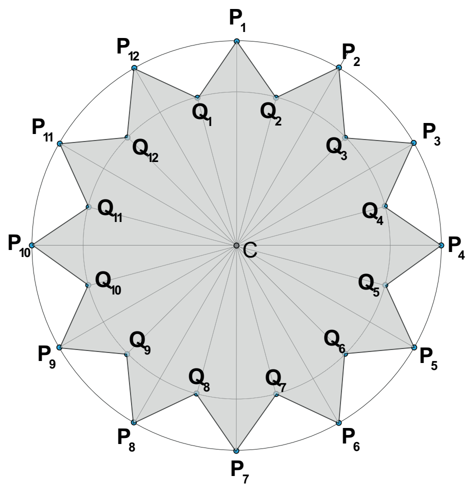


6. Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile in un intorno di $x = 0$, tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) = k$ con $k \neq 0$. Quanto vale $\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2)}{f^2(x)}$?

7. Stabilisci le equazioni degli asintoti (verticali, orizzontali e obliqui) della funzione $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x} - 1\right)$

8. Sapendo che $D(x)$ è una funzione continua dispari in $[-5;5]$ e $P(x)$ una funzione continua pari in $[-5;5]$, semplifica al massimo la seguente espressione integrale: $\int_{-5}^{5} D(x) + P(x)dx - 2 \cdot \int_{0}^{5} P(x) - 1dx + \int_{-1}^{1} D(x) \cdot P(x)dx$

9. La stella a 12 punte mostrata a fianco è delimitata da 24 segmenti reciprocamente congruenti. Gli estremi di ogni segmento giacciono su due circonferenze concentriche di raggi rispettivamente $r_1 = 4cm$ e $r_2 = 3cm$. Quanto misura il perimetro della figura? La soluzione deve essere esatta, può contenere frazioni, radicali semplici e doppi (come ad esempio $\sqrt{7}/6 + \sqrt{10 + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$), <u>ma non numeri decimali con la virgola</u> o funzioni goniometriche non calcolate come $\sin(20°)$.



10. Si hanno a disposizione 12 fogli verdi, 3 fogli gialli e 9 fogli rossi, indistinguibili tranne che per il colore. In quanti modi diversi è possibile disporli l'uno sull'altro, in modo che due fogli dello stesso colore non siano mai consecutivi?

Durata massima della prova: 5 ore. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 4 ore dalla dettatura del tema È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile. È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.