Liceo Statale Ettore Majorana

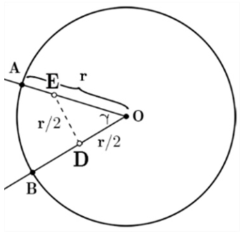
SIMULAZIONE DELL'ESAME DI STATO

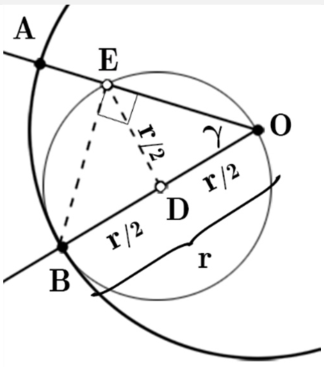
Tema di: MATEMATICA

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Data una circonferenza di centro O e raggio r e un suo angolo al centro $\gamma = A\hat{O}B$, traccia su OB il punto medio D e su AO il punto E tale che $OD \cong DE$. Dimostra (con metodi di geometria razionale o con strumenti trigonometrici) che $\overline{EO} = r \cdot \cos(\gamma)$.





$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO**

Per costruzione, D è il centro di una circonferenza di raggio $r/2$ passante per O, E, B. Il triangolo OEB è costruito su un suo diametro ed è quindi rettangolo (angolo retto in E).

Sia ha allora che la lunghezza del cateto EO, adiacente ad γ, è dato dal prodotto di $\cos(\gamma)$ per la lunghezza dell'ipotenusa, cioè r.

2. Date le traiettorie $y = -\lambda / \left[\cos(2\alpha)\cos^2(\alpha)\right] x^2 + \tan(\alpha) x$, per quale inclinazione α si ha la gittata massima?

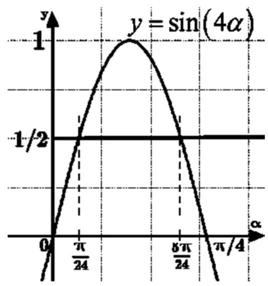
$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: \alpha = \pi/8)$

Ponendo $-\lambda / \left[\cos(2\alpha)\cos^2(\alpha)\right] x^2 + \tan(\alpha) x = 0$ si trovano le ascisse dei punti d'intersezione tra le traiettorie e l'asse delle x. Si trova banalmente che $x_1 = 0$ (infatti le traiettorie passano tutte per l'origine) e $x_2 = \cos(2\alpha)\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)/\lambda$, che, semplificando diventa $\cos(2\alpha)\cos(\alpha)\sin(\alpha)/\lambda \to \cos(2\alpha)\sin(2\alpha)/(2\lambda) \to \sin(4\alpha)/(4\lambda)$. Dovendo ora massimizzare $\mathrm{g}(\alpha) = \sin(4\alpha)/(4\lambda)$ nell'intervallo $(0;\pi/4)$ si può calcolare $\mathrm{g}'(\alpha) = \cos(4\alpha)/(\lambda)$ che ha un punto stazionario in $\alpha = \pi/8$. $\mathrm{g}''(\pi/8) = -4\sin(\pi/2)/(\lambda) < 0$ mostra che si tratta di un massimo.

3. Quale è la probabilità di effettuare un lancio con una gittata maggiore di $1/(8\lambda)$?

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: p = 2/3)$

Riprendiamo la formula per la gittata $\mathrm{g}(\alpha) = \sin(4\alpha)/(4\lambda)$ e risolviamo la diequazione $\sin(4\alpha)/(4\lambda) > 1/(8\lambda)$, cioè $\sin(4\alpha) > 1/2$ nell'intervallo $(0;\pi/4)$. La soluzione è $(\pi/24; 5\pi/24)$, la probabilità di pescare un angolo proprio nell'intervallo indicato è evidentemente $p = \dfrac{\frac{5}{24}\pi - \frac{1}{24}\pi}{\frac{1}{4}\pi - 0} = \dfrac{1/6}{1/4} = \dfrac{2}{3}$



4. Considerando tutti gli angoli α ammessi, quale è la gittata media del *lanciatore*?

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $\left(soluzione: M = 1/[2\lambda\pi]\right)$

Si tratta di calcolare la media intergrale della funzione gittata nell'intervallo $(0;\pi/4)$ o $[0;\pi/4]$ (infatti agli estremi la gittata risulta 0 e non crea problemi). Si ha…

$$M = \frac{\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(4\alpha)}{4\lambda} d\alpha}{\pi/4} = \frac{1}{\lambda\pi}\int_0^{\pi/4} \sin(4\alpha)\,d\alpha = -\frac{1}{4\lambda\pi}\cos(4\alpha)\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{4\lambda\pi}(-2) = \frac{1}{2\lambda\pi}$$

PROBLEMA 2

1. Trova le formule per il coseno iperbolico della somma e per la duplicazione del seno iperbolico.

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $\left(soluzione: \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)\ ;\ \sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)\right)$

Dalla tabella si legge che

$D\sinh(x) = \cosh(x)$, $D\cosh(x) = \sinh(x)$ e $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$.

Considerando x come variabile e y come costante (una scelta del tutto legittima, la formula non perde certo validità "tenendo fisso" un angolo) e derivando $\sinh(x+y)$ rispetto a x, si ottiene immediatamente

$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\sinh(x)$.

Per quanto riguarda la duplicazione osserviamo che

$\sinh(2x) = \sinh(x+x) = \sinh(x)\cosh(x) + \sinh(x)\cosh(x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

2. Traccia il grafico della funzione $y = 1/\cosh(x)$ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Aiuto: durante i calcoli può essere utile sapere che…

$\sinh(x) = 1$ ha per soluzione $x = \ln(\sqrt{2}+1)$ e $\sinh(x) > 1$ ha per soluzione $x > \ln(\sqrt{2}+1)$

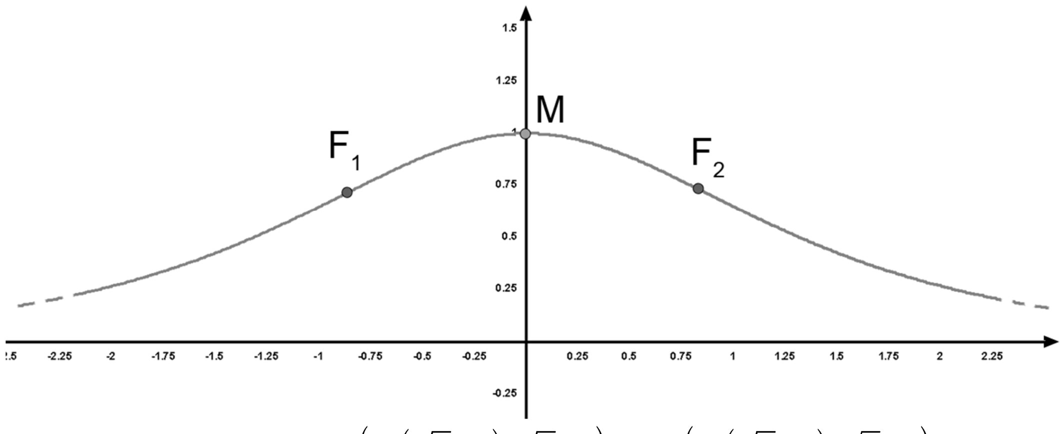
$\sinh(x) = -1$ ha per soluzione $x = \ln(\sqrt{2}-1)$ e $\sinh(x) > 1$ ha per soluzione $x > \ln(\sqrt{2}-1)$

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO**

Dominio:	$\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ è banalmente sempre strettamente positivo, per cui $\frac{1}{\cosh(x)}$ è definito ovunque
Intersezione con gli assi:	$y = \cosh(0) = 1$, mentre $1/\cosh(x) = 0$ è impossibile
Parità/disparità	Come scritto in tabella (e facilmente verificabile) $\cosh(x)$ è pari ($\cosh(-x) = \cosh(x)$) e quindi lo steso vale per $y = \frac{1}{\cosh(x)}$
Positività	Abbiamo già visto che $\forall x \in \mathbb{R}(\cosh(x) > 0)$ e quindi anche $y = \frac{1}{\cosh(x)}$ è sempre positivo.
Derivata	$D\frac{1}{\cosh(x)} = -\frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$ (continua e definita ovunque, il denominatore non si annulla mai)

Punti stazionari	$-\dfrac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}=0 \to \sinh(x)=0 \to \left(e^x-e^{-x}\right)/2=0 \to e^x=e^{-x} \to x=-x \to x=0$
Segno della derivata	$-\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$ è sempre negativo. Per quanto riguarda il $\sinh(x)$ risolviamo $\left(e^x-e^{-x}\right)/2>0 \to e^x>e^{-x} \to x>-x \to x>0$. La derivata di $y=1/\cosh(x)$ e quindi positiva per $x<0$ e negativa per $x>0$
Monotonia ed estremanti	$1/\cosh(x)$ è crescente per $x<0$, stazionario in $x=0$ e decrescente per $x>0$. In $x=0$ ha quindi un punto di massimo stazionario
Derivata seconda	$\mathrm{D}\left(-\dfrac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}\right)=-\dfrac{\cosh^3(x)-2\sinh^2(x)\cosh(x)}{\cosh^4(x)}=$ $-\dfrac{\cosh^2(x)-2\sinh^2(x)}{\cosh^3(x)}=-\dfrac{1-\sinh^2(x)}{\cosh^3(x)}=\dfrac{\left[\sinh(x)-1\right]\left[\sinh(x)+1\right]}{\cosh^3(x)}$
Segno della derivata seconda e concavità	Grazie all'aiuto presente nel testo si può facilmente costruire una tabella dei segni, dalla quale si ricava che la funzione è concava verso l'alto per $y<\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$, poi ha un flesso, è concava verso il basso fino a $y=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ dove c'è un altro flesso, ed è nuovamente concava verso l'alto per $y>\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$
Asintoti	La continuità esclude la presenza di asintoti verticali.
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1/\cosh(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{\left[+\infty+0^+\right]}=0^+$ (asintoto orizzontale totale di equazione $y=0$)

A questo punto si può tracciare il grafico della funzione, calcolando eventualmente altri punti per maggiore precisione.



con $M(0;1)$, $F_1\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right);\sqrt{2}/2\right)$ e $F_2\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right);\sqrt{2}/2\right)$

3. Dimostra in modo rigoroso che il grafico della funzione $y=\left|\sinh(x)\right|$ ha in $x=0$ un punto angoloso e calcola l'ampiezza di tale angolo.

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(\textit{soluzione}: \textit{angolo retto})$

La derivata di $y=\sinh(x)$ è $y'=\cosh(x)=\left(e^x+e^{-x}\right)/2$, che assume evidentemente valori positivi $\forall x\in\mathbb{R}$.

$y=\sinh(x)$ è quindi strettamente crescente e visto che $\sinh(0)=0$ si ha che $\sinh(x)>0$ per $x>0$ e

$\sinh(x)<0$ per $x<0$. Tutto ciò ci porta a concludere che $y=\left|\sinh(x)\right|=\begin{cases}\sinh(x) & per \quad x\geq 0\\ -\sinh(x) & per \quad x<0\end{cases}$

Basterà ora calcolare derivata sinistra e destra in $x=0$. Sia ha che…

$y'_+=\lim_{x\to 0^+} D\sinh(x)=\lim_{x\to 0^+}\cosh(x)=1$ e $y'_-=\lim_{x\to 0^-} D\left[-\sinh(x)\right]=\lim_{x\to 0^+}-\cosh(x)=-1$

L'angolo formato nell'origine è quello definito dalle bisettrici dei quadranti $y=x$ e $y=-x$, perpendicolari fra loro: si tratta quindi di un angolo retto.

4. Per definizione $\tanh(x)=\sinh(x)/\cosh(x)$ e $\operatorname{arctanh}(x)$ è funzione inversa di $\tanh(x)$. Calcola $\mathrm{D}\operatorname{arctanh}(x)$

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $\left(soluzione: \dfrac{d}{dx}\operatorname{arctanh}(x)=\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

Usando la regola del quoziente e le derivate scritte in tabella si ha…

$$\mathrm{D}\tanh(x)=D\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}=1-\frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}=1-\tanh^2(x)$$

Visto che $\operatorname{arctanh}(x)$ è l'inversa di $\tanh(x)$, per tutte le x (appartenenti ai rispettivi domini) deve valere l'identità $\tanh(\operatorname{arctanh}(x))=x$. Derivando entrambi i membri, usando la regola delle funzioni composte e la derivata di $\tanh(x)$ ricavata in precedenza, si ottiene…

$\tanh(\operatorname{arctanh}(x))=x \to \left[1-\tanh^2(\operatorname{arctanh}(x))\right]D\operatorname{arctanh}(x)=1 \to (1-x^2)\cdot D\operatorname{arctanh}(x)=1$ e quindi finalmente $D\operatorname{arctanh}(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

QUESTIONARIO

1) Stabilisci i valori di a e b, in modo che la funzione definita a fianco sia continua e derivabile $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases} xe^{x-1} & per\, x<1\\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2} & per\, x\geq 1\end{cases}$

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: \ a=4\ ;\ b=-3)$

Nei rispettivi insiemi di definizione, i due rami non hanno problemi di dominio, né di continuità. Andiamo quindi a imporre continuità e derivabilità del punto di contatto di $x=1$ imponendo le seguenti condizioni:

(continuità) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\to \lim_{x\to 1^-} xe^{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}\to \boxed{1=a+b}$

(derivabilità) $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)\to \lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+xe^{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{2b}{x^3}\right)\to \boxed{2=-a-2b}$

Risolvendo il sistema si ottiene: $\begin{cases}a+b=1\\ a+2b=-2\end{cases}\to\begin{cases}a=1-b\\ 1-b+2b=-2\end{cases}\to\begin{cases}a=4\\ b=-3\end{cases}$

2. Date le funzioni $f(x)=\sin(x)$ e $g(x)=\cos(x)$, calcola l'area della regione di piano compresa fra i due grafici nell'intervallo determinato da due successivi punti d'intersezione.

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $\left(soluzione: A = 2\sqrt{2} \right)$

L'equazione $\sin(x) = \cos(x)$ è equivalente a $\tan(x) = 1$, che ha soluzione $x = \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Scegliendo $k = 0$ e $k = 1$ si hanno le due ascisse $x_1 = \pi/4$ e $x_2 = 5\pi/4$. In questo intervallo vale sempre che $\sin(x) > \cos(x)$. Non ci resta che calcolare l'integrale definito sottostante:

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin(x) - \cos(x) dx = -\cos(x) - \sin(x) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

3. Enuncia in modo rigoroso il teorema di Rolle e usalo per rispondere in modo convincente alla seguente domanda: quante soluzioni reali distinte ha l'equazione $5x^4 - 60x^3 + 255x^2 - 450x + 274 = 0$, dal momento che $5x^4 - 60x^3 + 255x^2 - 450x + 274$ è la derivata di $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$?

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: 4\ soluzioni)$

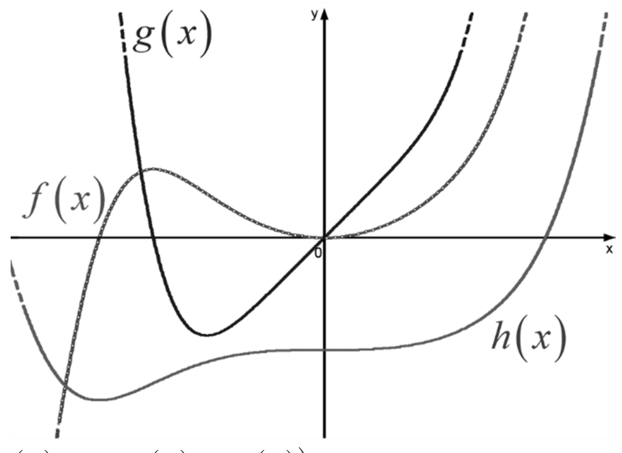
Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$ e vale $f(a) = f(b)$, allora esiste $c \in (a;b)$ tale che $f'(c) = 0$.
Si ha $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$, che è una funzione polinomiale ed è quindi continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$. Per $x_0 = 1,2,3,4,5$ si ha che $f(x_0) = 0$ e quindi, per il teorema di Rolle in ciascuno dei seguenti intervalli $(1;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$ e $(4;5)$ si trova (almeno) un'ascissa che annulla la derivata $5x^4 - 60x^3 + 255x^2 - 450x + 274$. Visto che $5x^4 - 60x^3 + 255x^2 - 450x + 274$ è un polinomio di quarto grado, esso non può avere più di 4 radici, il che conclude la dimostrazione.

4. Stabilisci il valore di $a \in \mathbb{R}$ in modo che la retta tangente alla funzione $f(x) = ax^2 - bx + 6$ nel punto con ascissa $x_0 = 2$ passi per l'origine.

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: a = 3/2)$

Si ha che $f'(x) = 2ax - b$ e quindi $f'(2) = 4a - b$. La retta (che passa per l'origine) deve avere quindi equazione $y = (4a - b)x$. Essa passa per il punto $P(2, 8a - 2b)$. Vale che $f(2) = 4a - 2b + 6$, per cui deve essere $8a - 2b = 4a - 2b + 6 \rightarrow 4a = 6 \rightarrow a = 3/2$

5) Nel piano cartesiano a fianco sono rappresentati i grafici di tre funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$. Esse sono legate dal fatto di essere l'una la derivata dell'altra (ad esempio potrebbe essere $f(x) = g'(x)$ e $g(x) = h'(x)$ per cui $f(x) = h''(x)$).
Stabilisci l'ordine corretto di tale relazione e spiega come sei giunto alla conclusione, ricollegandoti al significato geometrico della derivata.



$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: g(x) = f'(x)\ e\ f(x) = h'(x)\ cioè\ g(x) = h''(x))$

Notiamo innanzitutto che nessuna delle funzioni proposte può essere la derivata di $g(x)$, visto che per $x = 0$ $g(x)$ è crescente e quindi $g'(0)$ deve essere positivo (mentre nessuna delle funzioni rappresentate è positiva per $x = 0$). $g(x)$ deve allora essere la derivata di una delle altre funzioni. Appena a sinistra dell'origine, $g(x)$ è negativa e quindi la sua primitiva deve essere decrescente: si tratta di $f(x)$. Abbiamo trovato che $f'(x)=g(x)$ e quindi $h'(x)=f(x)$.

6. Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile in un intorno di $x=0$, tale che $f(0)=0$ e $f'(0)=k$ con $k\neq 0$. Quanto vale $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{f^2(x)}$?

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: 1/k)$

Calcoliamo il limite usando il teorema di De L'Hopital:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{f^2(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{D.H.}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot f'(x^2)}{2f(x)\cdot f'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x^2)}{f'(x)}$. Per ipotesi il secondo limite vale $\frac{k}{k}=1$.

Per determinare $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}$ usiamo nuovamente De L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{D.H.}\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{k}$$

7. Stabilisci le equazioni degli asintoti (verticali, orizzontali e obliqui) della funzione $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-1\right)$

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: asintoto\ verticale: x=0\ \ e\ \ asintoto\ obliquo\ destro: y=x)$

Il dominio di $f(x)$ è definito dalla condizione $e^{2x}-1>0\ \to\ e^{2x}>1\ \to\ 2x>0\to\ x>0$ (a "sinistra" non c'è quindi nulla).

Asintoto verticale: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-1\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+}e^{2x}-1\right)=-\infty\ \to\ \boxed{x=0}$

Asintoto orizzontale: $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-1\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\lim\limits_{x\to +\infty}e^{2x}-1\right)=+\infty\ \to$ nessun asintoto orizz.

Asintoto obliquo: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\xrightarrow{D.H.}\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}}{1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}=1$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)-1\cdot x=\frac{1}{2}\lim_{x\to +\infty}\left[\ln\left(e^{2x}-1\right)-2x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to +\infty}\left[\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln\left(e^{2x}\right)\right]=...$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to +\infty}\left[\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}\right)\right]=\frac{1}{2}\ln(1)=0\to\boxed{y=x}$$

8. Sapendo che $D(x)$ è una funzione continua dispari in $[-5;5]$ e $P(x)$ una funzione continua pari in $[-5;5]$ semplifica al massimo l'espressione integrale $\int_{-5}^{5}D(x)+P(x)dx-2\cdot\int_{0}^{5}P(x)-1dx+\int_{-1}^{1}D(x)\cdot P(x)dx$

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: 10)$

$$\int_{-5}^{5}D(x)+P(x)dx-2\cdot\int_{0}^{5}P(x)+1dx+\int_{-1}^{1}D(x)\cdot P(x)dx=$$

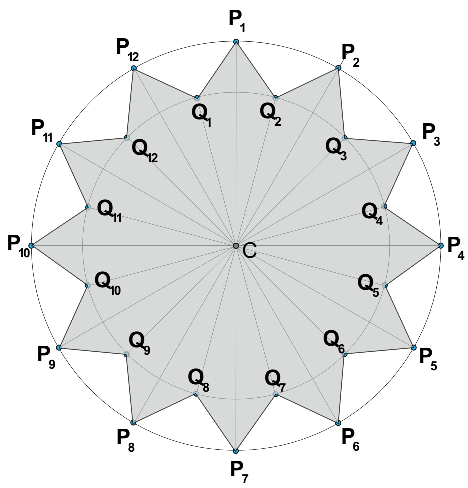
$$=\int_{-5}^{5}D(x)dx+\int_{-5}^{5}P(x)dx-2\cdot\int_{0}^{5}P(x)dx+2\cdot\int_{0}^{5}1dx+\int_{-1}^{1}D(x)\cdot P(x)dx=\int_{-5}^{5}P(x)dx-2\cdot\int_{0}^{5}P(x)dx+10$$

…dove abbiamo semplificato gli integrali $\int_{-5}^{5} D(x)dx$ e $\int_{-1}^{1} D(x)\cdot P(x)dx$, che hanno funzioni integrande dispari e limiti d'integrazione opposti (e valgono quindi 0).

Per le proprietà delle funzioni pari si ha invece $\int_{-5}^{5} P(x)dx = \int_{-5}^{0} P(x)dx + \int_{0}^{5} P(x)dx = 2\int_{0}^{5} P(x)dx$ e quindi

$$= \cancel{\int_{-5}^{5} P(x)dx} - \cancel{2\cdot\int_{0}^{5} P(x)dx} + 10 = 10$$

9. La stella a 12 punte mostrata a fianco è delimitata da 24 segmenti reciprocamente congruenti. Gli estremi di ogni segmento giacciono su due circonferenze concentriche di raggi rispettivamente $r_1 = 4cm$ e $r_2 = 3cm$. Quanto misura il perimetro della figura? La soluzione deve essere esatta, può contenere frazioni, radicali semplici e doppi (come ad esempio $\sqrt{7/6} + \sqrt{10 + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$), ma non numeri decimali con la virgola o funzioni goniometriche non calcolate come $\sin(20°)$.



$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $\left(soluzione: p = 24\cdot\sqrt{25 - 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}\right)$

Indichiamo con C il centro della stella e consideriamo uno qualsiasi dei 24 triangoli congruenti in cui è divisa la figura, per esempio P_1CQ_1. Si ha banalmente che $\widehat{C} = 360°/24 = 15°$, $\overline{CP_1} = 4cm$ e $\overline{CQ_1} = 3cm$. Per trovare $\overline{P_1Q_1}$ possiamo usare il teorema di Carnot: $\overline{P_1Q_1}^2 = 4^2 + 3^2 - 2\cdot3\cdot4\cdot\cos(15°) = 25 - 24\cdot\cos(15°)$ e quindi $\overline{P_1Q_1} = \sqrt{25 - 24\cdot\cos(15°)}$. Il perimetro complessivo sarà quindi $24\cdot\sqrt{25 - 24\cdot\cos(15°)}$. Non resta che calcolare $\cos(15°)$. Si può usare la formula di bisezione o la formula del coseno di una differenza: $\cos(15°) = \cos(45° - 30°) = \cos(45°)\cos(30°) + \sin(45°)\sin(30°) = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)/4$, per cui il perimetro è

$$p = 24\cdot\sqrt{25 - 6\cdot\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)} = 24\cdot\sqrt{25 - 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}$$

10. Si hanno a disposizione 12 fogli verdi, 3 fogli gialli e 9 fogli rossi, indistinguibili tranne che per il colore. In quanti modi diversi è possibile disporli l'uno sull'altro, in modo che due fogli dello stesso colore non siano mai consecutivi?

$(\downarrow)$ **SVOLGIMENTO** $(soluzione: 440)$

Visto che fogli verdi e fogli "non verdi" si equivalgono, bisogna alternarli, e ciò può essere fatto in due modi, iniziando o da un foglio verde o da un foglio non verde. Entrambe le configurazioni garantiscono, da sole, la separazione cromatica. Supponiamo di aver adottato una delle due strategie e concentriamoci sui 3 fogli gialli che devono essere disposti nei 12 posti dei fogli non verdi. Ciò può essere fatto in "12 su 3" modi. Effettuata questa scelta, automaticamente risultano definite tutte le altre posizioni, per cui si hanno complessivamente $2\cdot\binom{12}{3} = 2\cdot220 = 440$ disposizioni di fogli diverse (il 2 iniziale descrive la scelta iniziale su come iniziare l'alternanza verde-non verde)